UFR MATHÉMATIQUES | UNIVERSITÉ RENNES 1
Master Mathématiques / FHFS | Automne 2019

LA FONCTION *lambda* ET ‘LES’ THÉORÈMES DE PICARD

1 Un peu de géométrie

On définit les inversions de la sphère de Riemann de la manière suivante.

Pour un cercle $\mathscr{C}(z_0,r)$ de centre $z_0 \in \mathbf{C}$ et de rayon $r > 0$, on note $i_{\mathscr{C}} : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ l'involution telle que $\arg(z-z_0) \equiv \arg(i_{\mathscr{C}}(z)-z_0)$ et $|z-z_0||i_{\mathscr{C}}(z)-z_0| = r^2$ complétée par $i_{\mathscr{C}}(z_0) = \infty$.

Pour une droite d, i_d sera la réflexion d'axe d.

1.1. Dans chacun des cas ci-dessus donner une formule pour l'inversion de z en fonction de z.

1.2. En déduire qu'une inversion renverse l'orientation des angles et qu'elle transforme les droites et les cercles en droites ou en cercles.

2 Une construction géométrique de λ

Pour $a < b$ on notera $L_{a,b} = \{z \in \mathbf{C} \mid a < \Re e(z) < b \text{ et } |2z-(a+b)| > b-a\}$ et $\mathscr{C}[a,b]$ le cercle de diamètre $[a,b]$.

Nous ferons confiance à Carathéodory et admettrons que les représentations conformes de $L_{0,1}$ sur $\mathbb{H}$ s'étendent en des homéomorphismes de $\overline{L_{0,1}}$ sur $\overline{\mathbb{H}}$. Les adhérences sont prises dans $\hat{\mathbf{C}}$.

2.1. Dessiner $L_{0,1}$, $L_{0,1/2}$ et $L_{1/2,1}$.

2.2. Montrer que parmi les représentations conformes de $L_{0,1}$ sur $\mathbb{H}$, il y a une, que nous nommerons λ, telle que $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$ et $\lambda(\infty) = \infty$.

2.3. En utilisant $i_{\mathscr{C}[0,1]}$, montrer que λ se prolonge en une fonction continue de $\overline{L_{0,1/2}} \cup \overline{L_{1/2,1}}$ dans $\hat{\mathbf{C}}$, holomophe à l'intérieur.

2.4. En déduire que λ se prolonge holomorphiquement sur $B = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \Re e(z) < 1 \text{ et } 0 < \Im m(z)\}$,

2.5. Puis qu'elle se prolonge holomorphiquement sur $\mathbb{H}$

2.6. Vérifier que

(2.6.1) $\lambda(\mathbb{H}) = \mathbf{C}\backslash\{0,1\}$

(2.6.2) λ' ne s'annule pas sur $\mathbb{H}$.

3 Le groupe $\Gamma(2)$

Cette partie est optionnelle. Elle complète l'exercice 5 de la feuille 1 de THGG sur le lemme du ping-pong. On pourra admettre pour la suite la réponse à la question 3.2.

On note G le sous groupe de $PSL_2(\mathbf{Z})$ engendré par les homographies de matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

3.1. Soient d_0 et d_1 les droites verticales d'abscisses respectives 0 et 1. Vérifier que $\lambda \circ i_{d_1} \circ i_{d_0} = \lambda$ et $\lambda \circ i_{d_0} \circ i_{\mathscr{C}[0,1]} = \lambda$.

3.2. En déduire que λ réalise le quotient de $\mathbb{H}$ par l'action de G.

On note $\Gamma(2)$ l'ensemble des homographies $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec a, d impaires, b, c paires et de déterminant 1.

3.3. Montrer que $\Gamma(2)$ est un sous-groupe distingué de $PSL_2(\mathbf{Z})$.

Difficile En étudiant les orbites de $\Gamma(2)$ dans $\overline{L_{-1,0} \cup L_{0,1}}$, montrer que $\Gamma(2) = G$.

4 Les branches inverses de λ

Une branche inverse de λ est une fonction holmorphe φ telle que $\lambda \circ \varphi(z) = z$.

4.1. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C} \backslash \{0,1\}$ il existe une branche inverse $\varphi : D(z,\varepsilon) \to \mathbb{H}$.

4.2. Montrer que si φ_1 et φ_2 sont deux branches inverses de λ sur $D(z,\varepsilon)$ il existe $g \in \Gamma(2)$ telle que $\varphi_2 = g \circ \varphi_1$.

4.3. En déduire qu'une branche inverse $\varphi : D(z,\varepsilon) \to H$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin dans $\mathbf{C} \backslash \{0,1\}$.

5 Le petit théorème de Picard

Le but de cette partie est de montrer :

Théorème (Picard, 1879)**.** *Soit $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ une fonction entière. Si $\#\left(\mathbf{C} \backslash f(\mathbf{C})\right) > 1$ alors f est constante.*

Les valeurs n'étant pas prises par f sont dites exceptionnelles.

5.1. Donner un exemple de fonction entière n'ayant aucune valeur exceptionelle et un autre en ayant une.

On suppose désormais que f a deux valeurs exceptionnelles.

5.2. Montrer que l'on peut supposer que ces valeurs sont 0 et 1.

5.3. Montrer que pour $z \in \mathbf{C}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $\tilde{f} : D(z,\varepsilon) \to \mathbb{H}$ vérifiant $\lambda \circ \tilde{f} = f$.

5.4. Montrez que $\tilde{f}$ se prolonge analytiquement sur $\mathbf{C}$.

5.5. Donner un biholomorphisme $h : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ et conclure.

6 Le grand théorème de Picard

Le théorème est le suivant

Théorème (Picard, 1879)**.** *Soit $f : \mathbb{D}^* \to \mathbf{C}$ une fonction holomophe. Si $\#\left(\mathbf{C} \backslash f(\mathbb{D}^*)\right) > 1$ alors f est méromorphe sur $\mathbb{D}$.*

Nous allons en donner une preuve suivant Montel utilisant, la fonction λ, la caractérisation topologique des singularités essentielles ainsi que … le théorème de Montel. On extraiera librement des sous-suites sans les renommer.

6.1. Montrer que le grand théorème de Picard implique le petit.

On choisira deux coupures $U_1 = \mathbb{D} \backslash]-1,0]$ et $U_2 = \mathbb{D} \backslash [0,1[$ ainsi qu'un point a tel que $D(a,1) \subset \mathbf{C} \backslash \{0,1\}$.

On supposera que f a une singularité essentielle en 0.

6.2. Montrer qu'il existe une suite $(a_n) \subset \mathbb{D}^*$ telle que $|a_n|$ décroit vers 0 et pour tout n, $f(a_n) \in D(a,1)$.

Considérons la famille de fonction $f_n(z) = f\left(\frac{a_n}{a_1} z\right)$

6.3. En utilisant les raisonnement des questions 5.4. et 5.5. montrer qu'il existe $\tilde{f}_n : U_1 \to \mathbb{H}$ telle que $\lambda \circ \tilde{f}_n = f_n$.

6.4. Montrer que quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(h \circ \tilde{f}_n)$ converge uniformement sur tout compact de U_1 vers une fonction $h \circ \tilde{f} : U_1 \to \mathbb{D}$.

6.5. Montrer que dans ce cas la suite (f_n) converge uniformement sur tout compact de U_1.

6.6. Montrer que, quitte à extraire, cette suite converge uniformement sur tout compact de U_2

6.7. En déduire que la suite (f_n) converge uniformement sur tout compact de $\mathbb{D}^*$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre 0 de rayon $|a_1|$.

6.8. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\sup_{n \in \mathbf{N}, z \in \mathscr{C}} |f_n| < M$.

6.9. En déduire que pour tout n $\sup_{|a_{n+1}| \leqslant |z| \leqslant |a_n|} |f(z)| < M$.

6.10. Conclure.

7 Une construction modulaire de la fonction λ

Cette partie n'est pas à rendre

On considère $\tau \in \mathbb{H}$, $\Omega = \mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z}$ et $\wp(z;\tau)$ la fonction de Weierstrass

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{(n,m)\in\mathbf{Z}^2\\(n,m)\neq(0,0)}} \frac{1}{(z-n-\tau m)^2} - \frac{1}{(n+\tau m)^2}$$

7.1. Montrer que pour $z = 1/2$, $z = \tau/2$ et $z = (1+\tau)/2$, la série converge uniformement sur tout compact de $\mathbb{H}$ vers des fonctions holomorphes que nous noterons respectivement $e_1(\tau)$, $e_2(\tau)$ et $e_3(\tau)$.

7.2. Montrer que $\underline{\lambda} = \frac{e_3-e_1}{e_3-e_2}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{H}$ ne prenant pas les valeurs 0 et 1.

7.3. Soient ω_1, ω_2 et $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ deux bases de Ω et $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ la matrice de changement de bases. Montrer que $A \equiv Id \mod 2$ si et seulement si $\frac{\omega_i}{2} \equiv \frac{\tilde{\omega}_i}{2} \mod \Omega$.

7.4. En déduire que pour tout $g \in \Gamma(2)$, $\underline{\lambda} \circ g = \underline{\lambda}$

Afin de montrer que $\underline{\lambda} = \lambda$, *i.e.* $\underline{\lambda}$ est la représentation conforme de $L_{0,1}$ sur $\mathbb{H}$ correctement normalisée, il rest encore du travail.

Les calculs peuvent être organisés suivant Alfors §3.5 pp 279–281. Attention : la normalisation de $\underline{\lambda}$ est différente.

8 Une équaton différentielle pour λ

Cette partie n'est pas à rendre

Considérons l'équation différentielle :

$$E_R \quad : \quad S(f) + R(f)(f')^2 = 0$$

où R est une fraction rationnelle et S la dérivée Schwarzienne.

8.1. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux solutions de E_R telles que $f_1(z_1) = f_2(z_2)$, il existe une homographie g telle que $f_1 = f_2 \circ g$.

très difficile La fonction λ est solution de E_{R_0} pour $R_0(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{f^2} + \frac{1}{(1-f)^2} + \frac{1}{f(1-f)}\right)$.

8.2. En déduire que les solutions de E_{R_0} ont pour domaine maximal d'extension holomorphe des disques (où des demi-plans).

Constantin Carathéodory, *Conformal representation* (1952)

Emile Picard, *Mémoire sur les fonctions entières*, Annales scientifiques de l'E.N.S. tome 9 (1880), disponible sur NUMDAM

Paul Montel, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine*, Annales scientifiques de l'E.N.S. tome 29 (1912), disponible sur NUMDAM

Lars Alfhors, *Complex analysis* (1953)